

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/117/145-150>

Həmidə Ağayeva
Bakı Dövlət Universiteti
<https://orcid.org/0009-0001-8928-6433>
hamidaagayeva5@gmail.com

Bir qarışıq məsələnin formal həlli haqqında

Xülasə

Bu məqalədə parabolik tipə aid olan və istilik ötürmə prosesini təsvir edən diferensial tənlik üçün verilmiş qarışıq məsələnin formal həlli araşdırılır. Tədqiq olunan problem müntəzəm sərhəd şəraitində qurulmuşdur və bu baxımdan onun nəzəri təhlili xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Əvvəlcə problemin spektral xüsusiyyətləri öyrənilir, bunun üçün əsas tənlik üzrə spektral analiz aparılır. Spektral analiz nəticəsində müvafiq operatorun spektri və ona uyğun gələn funksiyalar araşdırılır.

Sonda isə əldə olunmuş formal həllin verilmiş başlanğıc və sərhəd şərtlərini tam şəkildə ödədiyi isbat olunur. Bundan əlavə olaraq qurulmuş formal həllin yeganəliyi riyazi cəhətdən əsaslandırılır və bu nəticə problemin düzgün həllə malik olduğunu göstərir. Beləliklə, məqalədə verilmiş qarışıq məsələ üçün əldə olunan həll, həm riyazi baxımdan əsaslandırılmış, həm də tətbiqi baxımdan mühüm nəticələr təqdim edən bir yanaşma ilə əldə olunur.

Açar sözlər: qarışıq məsələ, çıxıqlar üsulu, requlyar sərhəd şərtləri, Qrin funksiyası

Hamida Aghayeva
Baku State University
<https://orcid.org/0009-0001-8928-6433>
hamidaagayeva5@gmail.com

On the Formal Solution of a Mixed Problem

Abstract

The paper considers the formal solution of a mixed problem with regular boundary conditions for a parabolic differential equation describing the heat transfer equation. The existence and basic properties of the Green's function are studied based on spectral analysis. Using the Fourier transform and the residue method, the solution is expressed as a non-specific integral expansion. It is proved that the obtained formal expression satisfies the given initial and boundary conditions, and the uniqueness of the solution is shown.

Finally, it is proved that the obtained formal solution fully satisfies the given initial and boundary conditions. In addition, the uniqueness of the constructed formal solution is mathematically justified, and this result shows that the problem has a correct solution. Thus, the solution obtained for the mixed problem given in the article is obtained by an approach that is both mathematically justified and provides important results from an applied point of view.

Keywords: mixed problem, method of deductions, regular boundary conditions, Green's function

Giriş

Bu məqalədə aşağıdakı şəkilli

$$\vartheta_t = a^2 \Delta \vartheta, \vartheta = \vartheta(t, x, y), \quad (1)$$

$$\vartheta = \vartheta(t_0, x, y) = \Phi(x, y), (x, y) \in Q, \quad (2)$$

$$\vartheta_{ik}(\vartheta) = 0, y \in R^2, (i = 1, 2; k = 1, 2), \quad (3)$$

qarışıq məsələyə baxılır. Burada

$$U_{ik}(\vartheta) = \sum_{j=0}^1 \left[a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^j \vartheta}{\partial x_k^j} \Big|_{x_k=b_k} + b_{ij}^{(k)} \frac{\partial^j \vartheta}{\partial x_k^j} \Big|_{x_k=b_k} \right]$$

$a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}, a \in \mathbb{C}, a \neq 0, 0 \leq t_0 \leq T.$

Qeyd edək ki, (1)–(3) verilmiş qarışıq məsələsində t zamanının elə halına baxılır ki, $t \in (0, t_0)$, belə ki, $t \in (t_0, T)$. Burada məqsəd verilmiş qarışıq məsələnin formal həllini qurmaq, həll üçün alınabilən ifadənin (1)–(3) bərabərliklərini ödədiyini göstərməkdir (Dezin, 1980).

Bu məqsədlə

$$y'' - \lambda y = 0, y = y(x, \lambda), x \in (a, b), \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^1 a_{ij} \frac{\partial^j y}{\partial x^j} \Big|_{x=a} + b_{ij} \frac{\partial^j y}{\partial x^j} \Big|_{x=b} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i=1, 2; j=0, 1$), $\mathbb{C}$ -kompleks ədədlər çoxluğudur. (4), (5) spektral məsələsinin Birkhof mənasında rəqulyar olması üçün aşağıdakı şərtlərdən biri ödənməlidir.

a) $a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} \neq 0$

b) $a_{21} = b_{21} = 0, a_{11}b_{20} + b_{11}a_{20} \neq 0$;

c) $a_{11} = b_{11} = a_{21} = b_{21} = 0, a_{10}b_{20} - b_{10}a_{20} \neq 0$.

Aşağıdakı bərabərliklə təyin olunan ədədi təyin edək:

$$J = \begin{cases} 1, & \text{əgər a) və b) şərtlərində biri ödənərsə,} \\ 0, & \text{əgər c) şərti ödənərsə,} \end{cases}$$

$D(L)$ ilə (1.2), (1.3) spektral məsələnin doğurduğu operatoru işarə edək.

$$D(L) = \{f(x): f(x) \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b], U_i(f) = 0, i = 1, 2\}$$

Tədqiqat

Məlumdur ki, a), b), c) şərtlərindən biri ödənərsə, onda $L - \lambda$ diferensial operatorunun $G(x, \xi, \lambda)$ Qrin funksiyası λ -kompleks funksiyasının meramorf funksiyadır, λ_i polyusları λ_i tərtibinə malikdir, hesabi saydadır, yeganə limit nöqtəsinə malikdir və aşağıdakı kimi asimptotik ayrılışa malikdir (Məmmədov, Əhmədov, 2013):

$$\lambda_\nu = -4\pi^2 \nu^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right], (\nu \rightarrow \infty), \quad (6)$$

$G(x, \xi, \lambda)$ –Qrin funksiyası λ_ν polyuslarının qeyd olunmuş $\delta > 0$ ətrafından kənarda

$$\left| \frac{\partial^k G(x, \xi, \lambda)}{\partial x^k} \right| \leq C |\lambda|^{\frac{k-1}{2}} \quad (k = 0, 1, 2), \quad (7)$$

qiymətlənlənməsinə malikdir. Onda (4)–(6) məsələsinə y dəyişəninə görə Furiyenin integral çevirməsini tətbiq edək. (fərz olunur ki, həll var və onu y dəyişəninə görə qeyri-məxsusi integral ayrılışı şəklində göstərmək olar)

$$\vartheta(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(y, \sigma)} \tilde{\vartheta}(t, x, \sigma) d\sigma, \quad (8)$$

$$(y, \sigma) = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2.$$

(8) integralını (1)–(3) bərabərliklərində yerinə yazmaqla aşağıdakı məsələyə gəlirik:

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = a^2 \Delta_x \tilde{\vartheta} - a^2 |\sigma|^2 \tilde{\vartheta}, \quad (9)$$

$$\tilde{\vartheta}(t_0, x, \sigma) = \tilde{\Phi}(x, \sigma), \quad (10)$$

$$U_{ik}(\tilde{\vartheta}) = 0, (i = 1, 2; k = 1, 2), \quad (11)$$

$$\tilde{\Phi}(x, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{-i(\eta, \sigma)} \Phi(x, \eta) d\eta, \quad (12)$$

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, |\sigma|^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Fərz edək ki, (U_{1k}, U_{2k}) sərhəd şərti formaları Birkhof mənadada requlyardırlar. $G(x, \xi, \mu)$ ilə

$$\frac{d^2 p(x_k)}{dx_k^2} - \mu_k p(x_k) = 0, \quad x_k \in (a_k, b_k), \mu_k \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

$$U_{ik}(p) = 0, (i = 1, 2) \quad (14)$$

spektral məsələnin Qrin funksiyasını işarə edək. $A_{v_k}(G_k)$ ilə $C[a_k, b_k]$ fəzasından

$$D(L_k) = \{y(x): y(x_k) \in C^2(a_k, b_k) \cap C^k[a_k, b_k], U_{ik}(y) = 0, (i = 1, 2)\},$$

fəzasına təsir edən xətti operatoru işarə edək.

$$A_{v_k s_k}(G_k) h(x_k) \equiv h_{v_k s_k}^{(k)}(x_k) = \operatorname{res}_{\mu_k v_k} \mu_k^{s_k} \int_{a_k}^{b_k} G_k(x_k, \xi_k, \mu_k) h(\xi_k) d\xi_k, \quad (15)$$

$A_{v_k s_k}(G_k)$ operatorunu (9) və (10) bərabərliklərinə tətbiq edək.

$$\begin{aligned} A_{v_k s_k}(G_k) \left[\frac{d^2 p(x_k)}{dx_k^2} \right] &= A_{v_k s_k}(G_k) \left[\frac{d^2 p(x_k)}{dx_k^2} - \mu_k p(x_k) \right] + A_{v_k s_k}(G_k) \mu_k p(x_k) \\ &= \operatorname{res}_{\mu_k v_k} \mu_k^{s_k+1} \int_{a_k}^{b_k} G_k(x_k, \xi_k, \mu_k) p(\xi_k) d\xi_k = A_{v_k s_k+1}(G_k) p(x_k), \end{aligned} \quad (16)$$

Onda (9) və (10) bərabərliklərindən asanlıqla aşağıdakı bərabərlikləri ala bilərik (Tikhonov, Samarskiy, 1960):

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\vartheta}_{v_k, s_k}(t, x_k, \sigma_n) = a^2 \tilde{\vartheta}_{v_k, s_k+1}(t, x_k, \sigma_n) - a^2 |\sigma_n|^2 \tilde{\vartheta}_{v_k, s_k}(t, x_k, \sigma_n), \quad (17)$$

$$\tilde{\vartheta}_{v_k, s_k}(t_0, x_k, \sigma_n) = \tilde{\Phi}_{v_k, s_k}(x_k, \sigma_n), \quad (18)$$

$$h_{v_m s_m}^{(x_m)} = A_{v_m s_m}(G_m) A_{v_{m-1} s_{m-1}}(G_{m-1}) \cdots A_{v_1 s_1}(G_1) h(x_m), \quad (19)$$

qəbul edək. Lemma.(17),(19) məsələsinin yeganə həlli var, aşağıdakı ayrılışa malikdir.

$$\begin{aligned} \vartheta_{v_k, s_k}(t, x, \sigma) &= \operatorname{res}_{\mu_1 v_1} \operatorname{res}_{\mu_2 v_2} e^{a^2(\mu_{1k}^2 + \mu_{2k}^2 - |\sigma|^2)(t-t_0)} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \cdot \\ &\cdot \tilde{\Phi}(\xi, \sigma) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (20)$$

Lemmanın isbatı. (20) düsturu ilə təyin olunan funksiya (17),(18) məsələsinin həllidir.

Fərz edək ki, (17),(18) məsələsinin iki müxtəlif $\vartheta_{1v_k s_k}(t, x, \sigma)$, $\vartheta_{2v_k s_k}(t, x, \sigma)$ həlli var.

$$R_{v_k s_k}(t, x, \sigma) = \vartheta_{1v_k s_k} - \vartheta_{2v_k s_k} , \quad (21)$$

işarə edək. Aydındır ki, bu funksiya aşağıdakı məsələnin həlli olacaq.

$$\frac{\partial R_{v_k s_k}(t, x, \sigma)}{\partial t} = a^2 R_{v_k s_k}(t, x, \sigma) - a^2 |\sigma|^2 R_{v_k s_k}(t, x, \sigma), \quad (22)$$

$$R_{v_k s_k}(0, x, \sigma) = 0, (s_k = \overline{0, \alpha_k - 1}; k = 1, 2), \quad (23)$$

Aydındır ki, (22)–tənliyi xətti qeyri-bircins tənlikdir və $a^2 R_{v_k s_k}$ bu tənliyin sərbəst həddidir. (23) başlanğıc şərtini nəzərə almaqla, (22), (23) Koşi məsələsinin həlli

$$R_{v_k s_k}(t, x, \sigma) = a^2 \int_0^t e^{-a^2 |\sigma|^2 (t-\tau)} R_{v_k s_k}(\tau, x, \sigma) d\tau , \quad (24)$$

bələ ki, $s_k = \overline{0, \alpha_k - 1}$, $k=1, 2$. Məlum bərabərlikdən, yəni,

$\text{res}_{\mu_k v_k} (\mu_v - \mu_k v_k)^{\alpha_k} \int_{a_k}^{b_k} G_K(x_k, \xi_k, \mu_k) R(t, \xi, \sigma) d\xi = 0$ ($k = 1, 2$) bərabərliyində istifadə etməklə,

$$R_{v_k s_k}(t, \xi, x, \sigma) = - \sum_{i=0}^{\alpha_{v_k}-1} C_{\alpha_{v_k}}^i (-1)^{\alpha_{v_k}} \mu_{v_k}^{\alpha_{v_k}-1} R_{v_{ki}}(t, \xi, x, \sigma) \quad (25)$$

Buradan alınır ki, $R_{v_k s_k}(t, \xi, \sigma)$ funksiyaları (15) bərabərliklərini ödəyir. (24) tənliyindən

$$R_{v_k s_k}(t, \xi, \sigma) = 0, \quad (s_k = \overline{0, \alpha_k - 1}; k = 1, 2) \quad (26)$$

alınır. (25), (26) bərabərliklərindən (22), (23) məsələsinin yeganə həllinin olduğu alınır (Rasulov, 1964).

Ayrılış düsturundan və həm də (21)–dən (1)–(3) qarışıq məsələsinin $D(L_k)$ fəzasına daxil olan həlli üçün aşağıdakı ayrılışı alırıq (Mamadov, 1990):

$$\begin{aligned} \vartheta(t, x, \sigma) &= (-1)^m \sum_{v_1=1}^{\infty} \vartheta_{v,s}(t, x, \sigma) = (-1)^m \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \text{res}_{\mu_{v_1}} \text{res}_{\mu_{v_2}} e^{a^2(\mu_1+\mu_2-|\sigma|^2)(t-t_0)} \cdot \\ &\cdot \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \check{\Phi}(\xi, \sigma) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (27)$$

(27) ifadəsini (4)-də yerinə yazsaq,

$$\begin{aligned} \vartheta(t, x, y) &= (-1)^m \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \text{res}_{\mu_{v_1}} \text{res}_{\mu_{v_2}} e^{a^2(\mu_1+\mu_2)(t-t_0)} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) \cdot \\ &\cdot G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \left[\int_{R^2} e^{i(y, \sigma) - a^2 |\sigma|^2 (t-t_0)} \check{\Phi}(\xi, \sigma) d\sigma \right] d\xi_1 d\xi_2 , \end{aligned} \quad (28)$$

$$J(t, x, y) = \int_{R^2} e^{i(\xi, \sigma) - a^2 |\sigma|^2 t} \check{\Phi}(\xi, \sigma) d\sigma, \quad (29)$$

inteqralına baxaq. (12)-ifadəsini (29)-də yerinə yazıb adi hesablama qaydası ilə,

$$J(t, \xi, y) = \int_{R^2} Q(t, y - \eta) \check{\Phi}(\xi, \eta) d\eta, \quad (30)$$

inteqralını alırıq, $Q(t, y - \eta)$ inteqralın nüvəsi olub aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$Q(t, y - \eta) = \frac{e^{-\frac{|y-\eta|^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}, \quad (31)$$

$t > 0$ olduqda $\text{Re} a^2 > 0$, $y, \eta \in R^2$; $t < 0$, $y, \eta \in R^2$ olduqda $\text{Re} a^2 < 0$.

(15) ayrılış düsturuna əsasən (28) ifadəsindən alırıq ki, əgər $\Phi(x, y)$ funksiyası x dəyişəninə ($x = (x_1; x_2)$) görə $D(L_1), D(L_2)$ fəzalarına daxildirsə, onda ikiqat sıra, yəni (28) sırası x -dəyişəninə görə $t=0$ nöqtəsində müntəzəm yığılandır və

$$H_\Phi(0, x, \eta) = \Phi(x, \eta), \quad (32)$$

Bundan əlavə (28)-dən aydındır ki, diferensiaslama əməliyyatını birbaşa sonsuz sıra altında aparmaq olar (Mikhlin, 1968). Onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\Phi}{\partial t} - a^2 \Delta_x H_\Phi &= (-1)^m \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \text{res}_{\mu_1 v_1} \text{res}_{\mu_2 v_2} e^{a^2(\mu_1 + \mu_2)t} [a^2(\mu_1 + \mu_2 - a^2 \Delta_x)] \cdot \\ &\cdot \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \Phi(\xi, \eta) d\xi_1 d\xi_2 = (-1)^m a^2 \cdot \\ &\cdot \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \text{res}_{\mu_1 v_1} \text{res}_{\mu_2 v_2} e^{a^2(\mu_1 + \mu_2)t} \sum_{k=1}^2 \left(\mu_k - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \cdot \\ &\cdot \Phi(\xi, \eta) d\xi_1 d\xi_2 = (-1)^{m+1} \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \text{res}_{\mu_1 v_1} \text{res}_{\mu_2 v_2} e^{a^2(\mu_1 + \mu_2)t} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) \cdot \\ &\cdot G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \Phi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (33)$$

və Qrin funksiyasının xassəsinə görə

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dx_k^2} - \mu_k \right) \int_{a_k}^{b_k} G_k(x_k, \xi_k, \mu_k) h(\xi_k) = h(x_k) \quad (k = 1, 2) \\ &\text{res}_{\mu_k v_k} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} G_1(x_1, \xi_1, \mu_1) G_2(x_2, \xi_2, \mu_2) \Phi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0. \end{aligned}$$

$$(33) \text{ düsturunda alırıq ki, } \frac{\partial H_\Phi}{\partial t} - a^2 \Delta_x H_\Phi = 0, \quad (34)$$

Həllin ayrılışından və (34)-dən alırıq ki,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - a^2 \Delta_y Q = 0, (t \neq 0), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - a^2 \Delta \vartheta = \int_{R^2} \left[\frac{\partial Q(t, y - \eta)}{\partial t} H_\Phi(t, x, \eta) + Q(t, y - \eta) \frac{\partial H_\Phi(t, x, \eta)}{\partial t} - \right. \\ \left. - a^2 H_\Phi(t, x, \eta) \Delta_y Q - a^2 Q(t, y - \eta) \Delta_x H_\Phi \right] d\eta = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

Tamami ilə aydındır ki, əgər (27) və (28) düsturlarında $U_{ik}(i=1,2; k=1,2)$ sərhəd şərti operatorlarını qeyri-məxsusi inteqralların altına keçirmək mümkündürsə, onda $\vartheta(t, x, y)$ funksiyası sərhəd şərtlərini ödəyər. (29) düsturunu aşağıdakı kimi çevirək (Mamadov, 1990):

$$\begin{aligned} \vartheta(t, x, y) = \int_{R^2} Q(t, y - \eta) H_\Phi(0, x, \eta) d\eta + \int_{R^2} Q(t, y - \eta) [H_\Phi(0, x, \eta) d\eta \\ H_\Phi(0, x, \eta)] d\eta, \end{aligned} \quad (37)$$

(32) düsturuna və məlum fundamental həllin xassələrinə görə $\Phi(x, y)$ funksiyasının üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər daxilində $\vartheta(t, x, y)$ funksiyasının başlanğıc şərti ödədiyinə əmin olmaq olar (Əhmədov, Həsənov, Yaqubov, 2015).

Nəticə

Məqalənin aktuallığı. Qarışıq məsələlər, diferensial tənliklər nəzəriyyəsində mühüm yer tutur. Bu məsələlər müxtəlif fiziki və mühəndislik proseslərinin düzgün riyazi modelləşdirilməsi üçün istifadə olunur. Qrin funksiyası və çıxıqlar üsulu bu tənliklərin analitik həllini tapmaq üçün əsas riyazi modellərdir. Qarışıq məsələlərin aktuallığı onların nəzəri və tətbiqi riyaziyyatda geniş istifadə olunması ilə bağlıdır.

Məqalənin elmi yeniliyi. Bu işdə qarışıq məsələ üçün çıxıqlar üsulu ilə formal həll və onun yeganəlik xüsusiyyətləri göstərilmişdir. Spektral analiz əsasında Qrin funksiyasının yeni tərfi verilib, çoxölçülü tənliklər üçün inteqral ayrılış tətbiq olunaraq mövcud yanaşmalar genişləndirilib. Təklif olunan metod diferensial operatorların təkamülünə yeni baxış təqdim edir və qarışıq məsələlərin həllini asanlaşdırır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədəki formal həll üsulu qarışıq məsələlərin analitik və hesablama metodlarının inkişafına töhfə verir. Metod istilik ötürülməsi, diffuziya və dalğa prosesləri kimi fiziki və mühəndislik sahələrində tətbiq oluna bilər. Rəqulyar sərhəd şərtləri altında dəqiq həllərin əldə olunması real proseslərin daha düzgün təhlili və riyazi modellərin optimallaşdırılması üçün əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat

1. Dezin, A. A. (1980). *Obshchiye voprosy teorii granichnykh zadach*. Moskva: Nauka.
2. Məmmədov, Y. Ə., & Əhmədov, H. İ. (2013). *Riyazi fizika tənlikləri*.
3. Mamadov, Yu. A. (1990). O korrektnyy razreshimosti obshchikh smeshannykh zadach. *Differentsial'nye Uravneniya*, 26(3), 534–537.
4. Mamadov, Yu. A. (1990). O korrektnyy razreshimosti obshchikh smeshannykh zadach. *Differentsial'nye Uravneniya*, 26(3), 534–537.
5. Mikhlin, S. G. (1968). *Kurs matematicheskoy fiziki*. Moskva: Nauka.
6. Rasulov, M. L. (1964). *Metod konturnogo integrala*. Moskva: Nauka.
7. Tikhonov, A. I., & Samarskiy, A. A. (1960). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moskva: Nauka.
8. Əhmədov, Q. T., Həsənov, K. Q., & Yaqubov, M. H. (2015). *Adi diferensial tənliklər*.